Sèrie 0

1. (a) Tal com es veu en el dibuix, les abscisses dels punts $(0, 5)$, P, i Q són les tres solucions de l'equació $f(x) = 5$:

$$-x^3 + 7x^2 - 6x + 5 = 5 \quad \longrightarrow \quad x(-x^2 + 7x - 6) = 0$$
$$x = 0, \qquad x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{-2} = \begin{cases} 1 \\ 6. \end{cases}$$

Per tant, les coordenades dels punts que es demana són $P = (1,5)$, $Q = (6,5)$, i $R = (6,0)$.

Ara, la recta r que passa pels punts $P = (1,5)$ i $R = (6,0)$ té pendent $m = \frac{0-5}{6-1} = -1$, per tant és $y = -x + n$ i, com que passa pel punt $R = (6,0)$, tenim que $n = 6$; es tracta de la recta $y = -x + 6$.

(b) L'àrea del terreny, és la integral definida entre els punts d'abscissa $x = 1$ i $x = 6$ de la funció $f(x)$ menys la recta:

$$A = \int_1^6 \big(f(x) - r(x)\big)\, dx =$$
$$= \int_1^6 \big((-x^3 + 7x^2 - 6x + 5) - (-x + 6)\big)\, dx =$$
$$= \int_1^6 (-x^3 + 7x^2 - 5x - 1)\, dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x\right]_1^6 =$$
$$= \left(-\frac{6^4}{4} + \frac{7}{3}6^3 - \frac{5}{2}6^2 - 6\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{7}{3} - \frac{5}{2} - 1\right) = \frac{1025}{12} = 85.416\ldots\ u^2.$$

Alternativament, es pot integrar només $f(x)$ entre 1 i 6, i restar-ne el triangle inferior no inclòs al terreny:

$$A = \int_1^6 f(x)\, dx - \frac{5\cdot 5}{2} = \int_1^6 (-x^3 + 7x^2 - 6x + 5)\, dx - \frac{25}{2} = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7}{3}x^3 - 3x^2 + 5x\right]_1^6 - \frac{25}{2} = \left(-\frac{6^4}{4} + \frac{7}{3}6^3 - 3\cdot 6^2 + 5\cdot 6\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{7}{3} - 3 + 5\right) - \frac{25}{2} = \frac{1175}{12} - \frac{25}{2} = 85.416\ldots\ u^2.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 per plantejar bé l'equació, 0,25 per resoldre-la, 0,25 per donar les coordenades dels tres punts i 0,5 per l'equació de la recta. (b) Compteu 0,5 pel plantejament de la integral i 0,75 pel càlcul.

Comentaris: Compteu bé qualsevol de les maneres de fer-ho, si són correctes i estan ben explicades.

2. (a) La matriu de coeficients i la matriu ampliada del sistema són:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad \overline{M} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & k & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calculem el determinant de coeficients i l'igualem a zero, obtenim

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 6k - 3 - 12k = -6k - 6 = 0,$$

és a dir, $k = -1$. Per tant, si $k \neq -1$ tindrem $rang(M) = rang(\overline{M}) = 3$, que coincideix amb el número d'incògnites, i el sistema és compatible determinat. En canvi, si $k = -1$, el sistema queda

$$\left.\begin{aligned} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y - z = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{aligned}\right\}$$

I, com que la tercera equació és la resta de la primera menys la segona, és un sistema compatible indeterminat.

La solució per a $k = 0$ la podem calcular per la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{8}{-6} = \frac{-4}{3},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-4 + 18 + 12 + 12 - 36 - 2}{-6} = 0.$$

(b) Per al cas $k = -1$, i eliminant la tercera equació perquè és redundant, obtenim

$$\left.\begin{aligned} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y - z = 3 \end{aligned}\right\}.$$

Restant, obtenim $3x + 3y = 1$. Fent $x = \lambda$, tenim $y = \frac{1}{3} - \lambda$ i llavors $z = x - y - 3 = \lambda - \frac{1}{3} + \lambda - 3 = 2\lambda - \frac{10}{3}$. Totes les solucions del sistema són, doncs, de la forma

$$(x, y, z) = \left(\lambda,\ \frac{1}{3} - \lambda,\ 2\lambda - \frac{10}{3}\right),\quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(c) Com hem notat, en el cas $k = -1$, la tercera equació és redundant perquè és la resta de la primera menys la segona. Si modifiquem el terme independent posant, per exemple, $3x + 3y = 2$ tindrem la incongruència $1 = 2$ i el sistema serà incompatible. Dit d'una altra manera, és incompatible perquè la matriu de coeficients no ha canviat, i té rang 2, mentre que ara la matriu ampliada té rang 3 ja que

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 9 + 12 - 2 = -3 \neq 0.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 pel determinant, 0,25 per la discussió i 0,5 per la solució del cas $k = 0$. (b) Compteu 0,75 per l'expressió paramètrica de totes les solucions. (c) Compteu 0,25 per la nova equació i 0,5 per la justificació que ara és incompatible.

3. (a) Calculem primer la probabilitat que les dues boles tinguin la mateixa lletra. Això només pot passar si són dues A o dues S.

$$P(dues\ A) = P(primera\ A\ i\ segona\ A) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{36} = P(dues\ S).$$

Per tant, $P(dues\ diferents) = 1 - P(dues\ iguals) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{17}{18} = 0.944\ldots$.

Alternativament, ho podem argumentar directament de la manera següent: si la primera bola no és ni A ni S, segur que les dues lletres són diferents; si la primera bola és una A, hi ha 7 boles favorables per a la segona extracció (totes menys l'altra A); i anàlogament, si la primera bola és una S, hi ha també 7 boles favorables per a la segona extracció. Per tant,

$$\begin{aligned} &P(dues\ diferents) \\ &\quad = P(primera\ no\ és\ ni\ A\ ni\ S) + P(primera\ A\ i\ segona\ no\ A) \\ &\quad + P(primera\ S\ i\ segona\ no\ S) = \\ &\quad = \frac{5}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} = \frac{17}{18}. \end{aligned}$$

(b) El nombre de boles A extretes segueix una llei binomial amb $n = 5$ i $p = \frac{2}{9}$. Passant al complementari, tenim

$$P(almenys\ 2\ A) = 1 - P(una\ A) - P(cap\ A) = 1 - \binom{5}{1}\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right)^4 - \left(\frac{7}{9}\right)^5 =$$
$$= 0.308\ldots\ .$$

(c) Si derivem la funció i la igualem a zero,

$$f'(x) = 2\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = 2\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0,$$

ens queda l'equació $\ln x = 1$; per tant, f té només un punt crític, $x = e$. Resulta que és un màxim ja que la derivada segona és negativa:

$$f''(x) = 2\frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}, \qquad f''(e) = 2\frac{-e}{e^4} = -2e^{-3} < 0.$$

Com que només té un màxim, la funció és creixent en l'interval $(0, e)$ i decreixent en $(e, +\infty)$, cosa que també podem veure directament mirant el signe de la derivada.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 pel plantejament i 0,25 pel càlcul. (b) Compteu 0,5 pel plantejament i 0,25 pel càlcul. (c) Compteu 0,5 pel càlcul de la derivada, 0,25 per determinar el màxim i 0,25 per les zones de creixement i decreixement.

Comentaris: És un mètode més llarg però a l'apartat (b) es pot respondre també calculant amb la binomial $P(2A) + P(3A) + P(4A) + P(5A)$; doneu també aquestes respostes com a correctes si estan ben argumentades.

4A. (a) El pla buscat ha de ser perpendicular al vector $\overrightarrow{AB} = (-3,-2,3) - (1,2,3) = (-4,-4,0) \sim (1,1,0)$, per tant, té equació de la forma $x + y + 0z + D = 0$. A més, ha de passar pel punt mig $\frac{1}{2}(A + B) = (-1, 0, 3)$; per tant, $-1 + D = 0$ i es tracta del pla d'equació $x + y + 1 = 0$.

Geomètricament és clar que aquest pla π està format, precisament pels punts a igual distància de A que de B. Efectivament, per un punt arbitrari $P = (x, y, z)$, l'equació $d(P, A) = d(P, B)$ és equivalent a

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2},$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9$$
$$= x^2 + 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9,$$

$$-2x + 1 - 4y = 6x + 9 + 4y,$$

$$-8x - 8y - 8 = 0$$

que simplificant-la és, precisament, l'equació del pla π, $x + y + 1 = 0$.

(b) Usant la fórmula de la distància punt-pla, tenim

$$d(A,\pi) = \frac{|1+2+1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}, \qquad d(B,\pi) = \frac{|-3-2+1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

No és casualitat que doni el mateix resultat: les projeccions ortogonals de A i de B al pla π són, precisament el punt mig $\frac{1}{2}(A + B) = (-1, 0, 3)$ per on hem fet passar el pla π, perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$.

(c) El punt $C = (-7, 6, 3)$ compleix $-7 + 6 + 1 = 0$ i per tant pertany al pla π de l'apartat anterior. Això vol dir que $d(C, A) = d(C, B)$ i, per tant, el triangle ABC té almenys dos costats iguals; per tant, és isósceles.

Per calcular la seva àrea només necessitem la longitud de la base $d(A, B) = 2\frac{4}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$, i la seva alçada, que és la distància de C al punt mig entre A i B:

$$h = d\big((-7, 6, 3), (-1,0,3)\big) = \sqrt{6^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Per tant el triangle ABC té àrea

$$\grave{A}rea = \frac{4\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 24\ u^2.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 per calcular l'equació del pla π, i 0,5 per justificar que es tracta dels punts equidistants de A i de B. (b) Compteu 0,25 per calcular una distància, 0,25 per l'altra, i 0,25 per justificar que no és casualitat que donin el mateix resultat. (c) Compteu 0,25 per raonar que el triangle és isòsceles, 0,25 per calcular la base i 0,25 per calcular l'alçada.

4B. (a) Com s'indica a l'enunciat, denotem per x la fondària del cobert, i denotem per h l'alçada; l'amplada serà $3x$. El volum del cobert ha de ser de 6 m^3, és a dir, $3x \cdot x \cdot h = 6$ i per tant $h = \frac{2}{x^2}$. El cost de construcció ve donat per

$$C(x) = 30 \cdot (3xh + xh + xh) + 50 \cdot 3x^2 + 35 = 150xh + 150x^2 + 35 =$$

$$= 150x \cdot \frac{2}{x^2} + 150x^2 + 35 = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35.$$

(b) Per minimitzar la funció $C(x)$, calculem la seva derivada:

$$C'(x) = \frac{-300}{x^2} + 300x$$

Si resolem l'equació $C'(x) = 0$ obtenim $\frac{300}{x^2} = 300x$ o, equivalentment, $x^3 = 1$, que té com a única solució real $x = 1$. Com que $C''(x) = \frac{600}{x^3} + 300$ i $C''(1) > 0$, comprovem fàcilment que es tracta d'un mínim de la funció. Així doncs, les dimensions del cobert han de ser $x = 1$ metre de fondària, $3x = 3$ metres d'amplada, i $h = \frac{2}{1^2} = 2$ metres d'alçada. Per aquestes dimensions el cost de construcció és de $C(1) = \frac{300}{1} + 150 \cdot 1^2 + 35 = 485$ euros.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 pel planteig correcte de les variables (amplada, fondària i alçada), 0,5 per expressar la lligadura que representa el volum fixat, i 0,5 per l'expressió final del cost. (b) Compteu 0,25 per la derivada, 0,25 per aïllar correctament, 0,25 per justificar que es tracta d'un mínim, 0,25 per les tres dimensions demanades, i 0,25 pel càlcul del cost total.

Comentaris: Poden plantejar que l'amplada és $\boldsymbol{x}$ i la fondària $\frac{x}{3}$; els càlculs seran diferents però doneu els punts corresponents de cada part sempre que estigui ben feta i ben argumentada. La justificació que es tracta d'un mínim pot fer-se també sense la derivada segona, analitzant el signe de la derivada primera; compteu-ho bé si ho fan així, sempre que estigui ben argumentat.